Vorlesung (4) vom 23. 11. 2021

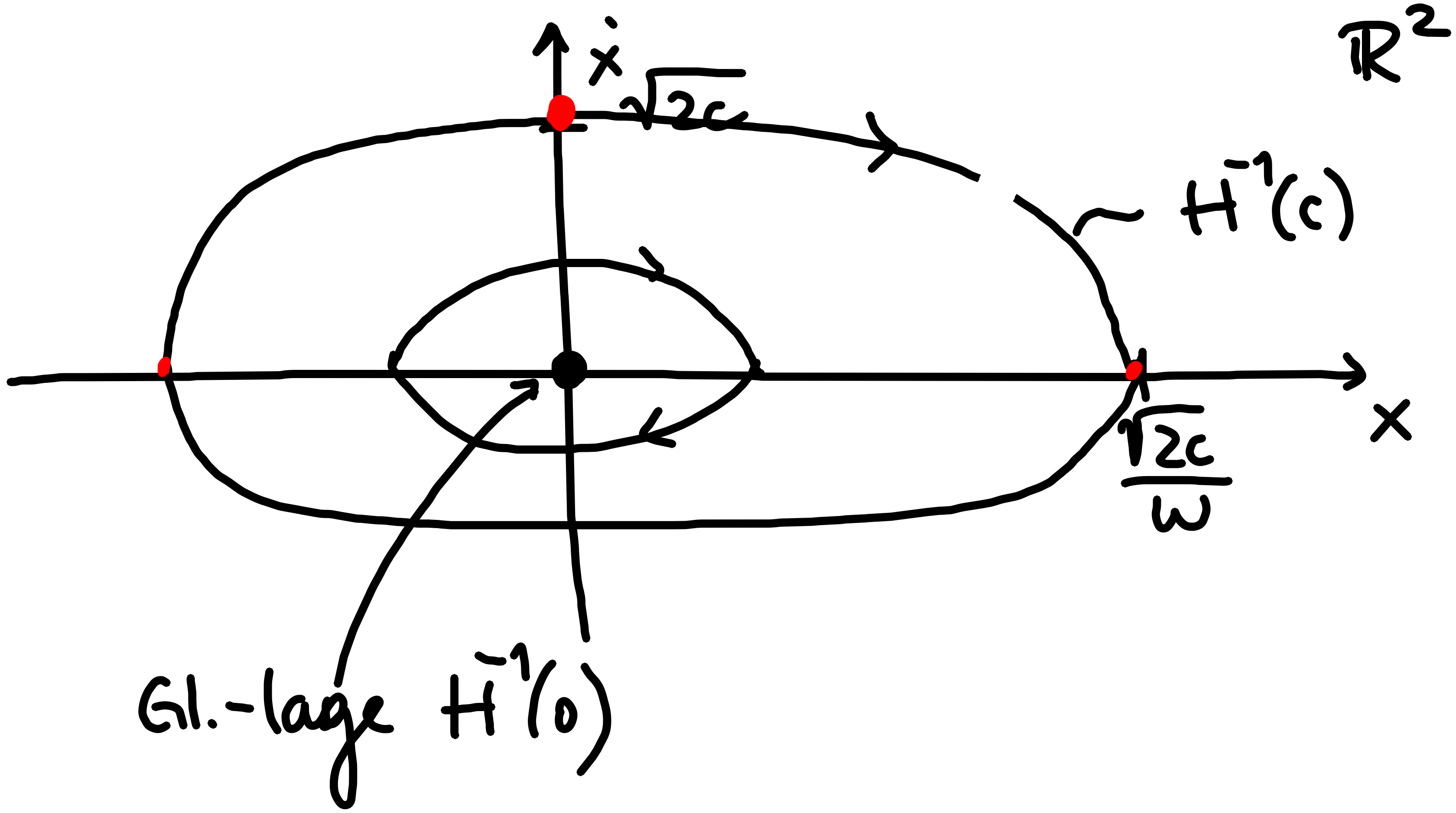
[Wh.: Wir hatten das lineare Pendel

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (*)$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ mit $\omega > 0$ betrachtet und mit Hilfe des 1. Integrals $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$H(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2$$

das Phasendiagramm ermittelt:



Nachtrag: Erinnere das zugeh. dynamische System zu (*):

$$\varphi^t(x,\dot{x}) = x \cdot \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}}{\omega} \sin(\omega t)$$

Wie man z.B. den „Sinus hier entdeckt":

Aus dem 1. Integral H ergibt sich die so genannte Energiegleichung

$$H(x,\dot{x}) = c_0 \iff \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = c_0$$

$$\iff \dot{x} = \pm\sqrt{-\omega^2 x^2 + 2c_0}$$

(bei festem $c_0 \geq 0$). Die Anf.-bed. $(x_0, \dot{x}_0)$ legt fest, ob man im unteren oder oberen Teil der Ellipse ist (sagen wir hier: $\dot{x}_0 > 0$).

Trennung der Variablen:

$$\frac{dx}{\sqrt{-\omega^2 x^2 + 2c_0}} = dt$$

[Sagen wir auch noch: $x_0 = 0$: Ziel: Entdecke:

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin(\omega t).$$]

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{2c_0}} \cdot \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega x}{\sqrt{2c_0}}\right)^2}}$$

Substituiere nun $x = \frac{\sqrt{2c_0}}{\omega} y \implies$

$$dx = \sqrt{\frac{2c_0}{\omega}}\, dy :$$

$$t(y) = \frac{1}{\omega} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\omega} \arcsin(y)$$

$$\implies \quad t(x) = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{2c_0}}\right).$$

⌜Man entdeckt also zunächst arcsin als Stammfkt. von $y \longmapsto 1/\sqrt{1-y^2}$. ⌟

$$\Rightarrow \quad \sin(\omega t) = \frac{\omega x}{\sqrt{2c_0}}$$

und mit

$$c_0 = \frac{1}{2}\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{x_0^2}_{=0} = \frac{1}{2}\dot{x}_0^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2c_0} = \dot{x}_0$$

Schließlich:

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

[also sin als Umkehrfunktion von arcsin dann.]

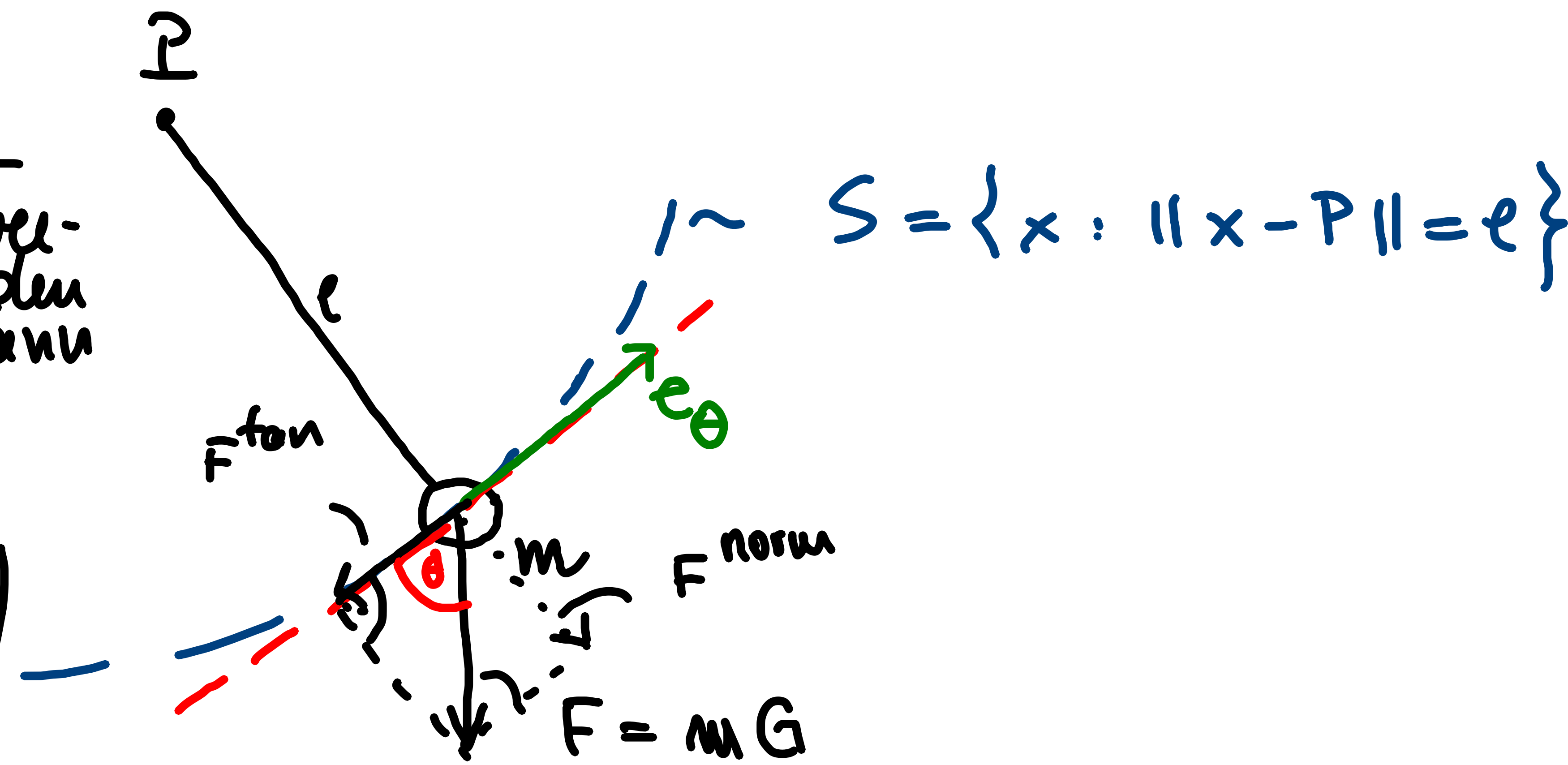
(1.22) Das mathematische Pendel.

Ein Pendel besteht aus einem (masselosen) Faden (vllt. besser eine Stange) der Länge $\ell > 0$ dessen eines Ende fixiert ist und an dessen anderem Ende ein Körper der (trägen und schwere) Masse $m > 0$ unter dem Einfluss des **Schwerefeldes** G pendeln kann:

Die anziehende Schwerkraft auf den Körper ist dann

$$F = mG$$

(wo m hier die schwere Masse des Körpers ist.)



Die Schwerkraft wird nun in Tangential- und Normalkomponente zerlegt,

$$mG = F^{tan} + F^{norm}$$

Nur F^{tan} führt zur Pendelbewegung, F^{norm} wird im Faden (bzw. der Stange) neutralisiert.

Führe Koordinatensystem mit Ursprung in P ein, so dass $G = -g e_2$ ist (und (e_1, e_2) die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$). Konfigurationsraum ist nun die 1-dim. Untermannigfaltigkeit

$$S = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = \ell^2 \}.$$

Diese parametrisieren wir mit

$$\Phi : \mathbb{R} \to S, \quad \theta \longmapsto \Phi(\theta) = (\ell \cos\theta, \ell \sin\theta)$$

Eigentlich ist Φ eine „Überlagerung": Sie wickelt $\mathbb{R}$ auf S auf. Wir wollen nun die Newton-Gleichung

$$m_t \ddot{x} = m_s G \qquad (N)$$

zu einer gew. Dgl. 2. Ordnung in θ umschreiben. Berechne dazu

$$e_\theta := \frac{1}{\ell} \Phi'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

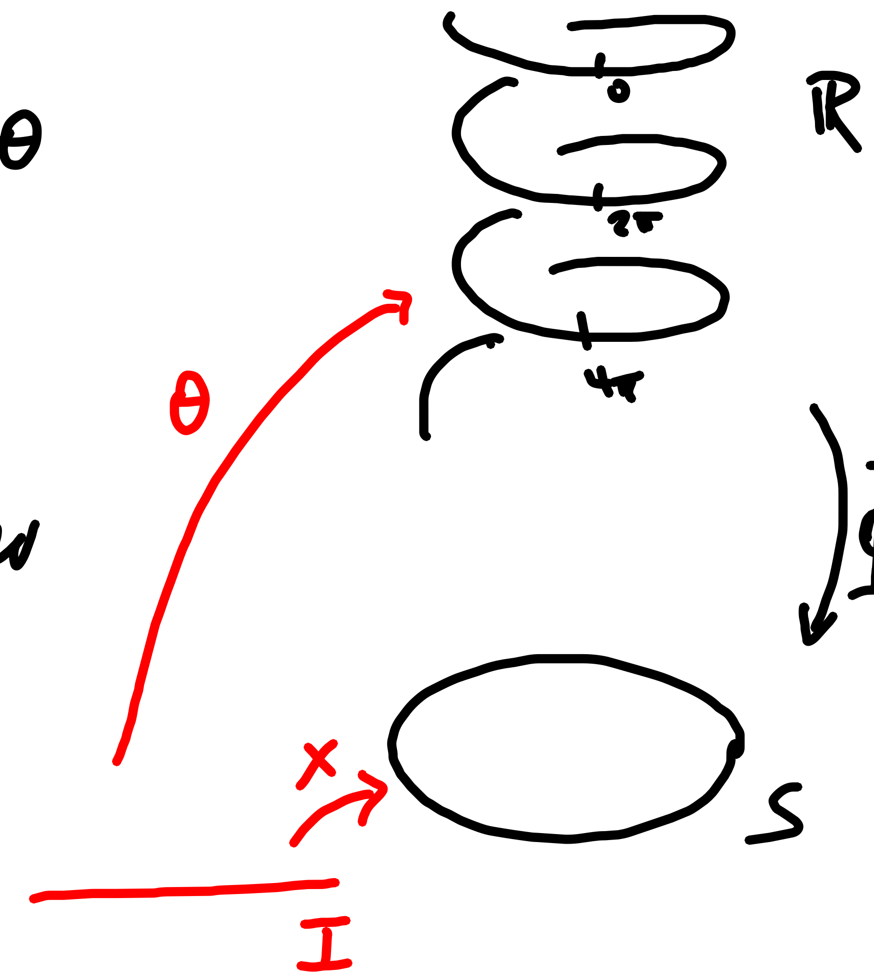
den Einheitsvektor in positiver Tangentialrichtung. Die Tangentialkomponente F^{tan} von mg ist dann

$$F^{tan} = -mg \sin(\theta) \cdot e_\theta$$

Jetzt müssen wir noch die Konfigurations-variable transformieren

$$\Phi(\theta) = (\ell \cos\theta, \ell \sin\theta)$$

$$\Phi'(\theta) = (-\ell \sin\theta, \ell \cos\theta) = \ell \cdot e_\theta$$



Ist nun

$$x(t) = \Phi(\theta(t)),$$

(ein „Lift" $t \mapsto \theta(t)$ von $x(t)$ existiert immer und ist durch $\theta(t_0)$ eindeutig bestimmt), so ist zunächst:

$$\dot{x} = \Phi' \circ \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = \Phi'' \circ \theta \cdot \dot{\theta}^2 + \Phi' \circ \theta \cdot \ddot{\theta} \qquad (*)$$

$$\left(= \ddot{x}^{\mathrm{norm}} + \ddot{x}^{\mathrm{tan}}\right)$$

Beachte nun: $\Phi'(\theta)$ ist tangential und $\Phi''(\theta)$ ist normal, denn

$$\frac{d}{d\theta}\|\ell e_\theta\|^2 = \frac{d}{d\theta}\langle \Phi', \Phi'\rangle = 2\cdot\langle \Phi', \Phi''\rangle$$

$$\| $$

$$\frac{d}{d\theta}\ell^2 = 0 .$$

Also ist (*) die Zerlegung von $\ddot{x}$ in Normal- und Tangentialkomponente. Die Tang.-Komponente von (N) wird damit zu:

$$m_t \ddot{x}^{tan} = (m_s G)^{tan}$$

$$\Longleftrightarrow \quad m_t \ddot{\theta}\cdot \underbrace{\Phi'(\theta)}_{=\ell e_\theta} = -m_s g \sin\theta \cdot e_\theta \qquad \Big/ m_t = m_s =: m$$

$$\Longleftrightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta .$$

Setze schließlich $x := \theta$ und $\omega := \sqrt{\frac{g}{\ell}} > 0$

und mache Zeitvariablentransformation $t = \frac{1}{\omega}\tau$:

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2}\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin(x)$$

Wir nennen deshalb

$$\ddot{x} + \sin x = 0 \qquad (P)$$

[Beachte: (P) ist nicht-linear !]

die Pendelgleichung auf $\mathbb{R}$.

Beachte: (i) Nahe bei der Gleichgewichtslage $x_0 = 0$ ($\dot{x}_0 = 0$) ist

$$\sin x = x + o(|x|),$$

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

also die linearisierte Glg.

$$\ddot{x} + x = 0$$

(also das „lineare Pendel")

(ii) (P) ist Hamiltonsch mit Hamiltonfunktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$H(x,y) = \frac{1}{2} y^2 - \cos x,$$

denn $x \mapsto -\cos x$ ist ein Potential für $x \longmapsto -\sin x$:

$$-\frac{d}{dx}(-\cos x) = -\sin x.$$

Falls auf $\{H = c\}$ keine Gl.-lagen liegen, sind die Zus.-komponenten also Bahnkurven des Systems.

$H = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$

Das Phasendiagramm:

(i) Gl.-lagen sind Punkte $(x_0, 0)$, wo x_0 krit. Pkt. des Potentials ist:

$$\sin(x_0) = 0 \iff x_0 \in \mathbb{Z}\cdot\pi$$

⌈Erinnere die 2π-Periodizität in x-Richtung des Diagramms: Der eigentliche Phasenraum ist $P = S^1 \times \mathbb{R}$ (Zylinder).⌋

Es ist

$$\cos(2k\pi) = +1, \quad \cos((2k+1)\pi) = -1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Das Energieniveau für $x_0 = (0,0)$ ist also $H_0 = -1$, für $x_0 = (\pi, 0)$: $H_0 = +\underline{1}$.

$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$

(ii) Da $\cos x \leq 1$ ist, folgt $H(x,y) \geq -1$.

(iii) $H^{-1}(-1) = \{(2k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\}$

(iv) $H^{-1}(+1) = \{((2k+1)\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x,y) : y = \pm\sqrt[2]{\cos x + 1}\}$

(v) $c \in (-1, 1)$: $H(x,y) = c \iff y = \pm\sqrt[2]{\cos x + c}$
(also $x \in [-\arccos(-c), +\arccos(-c)]$)

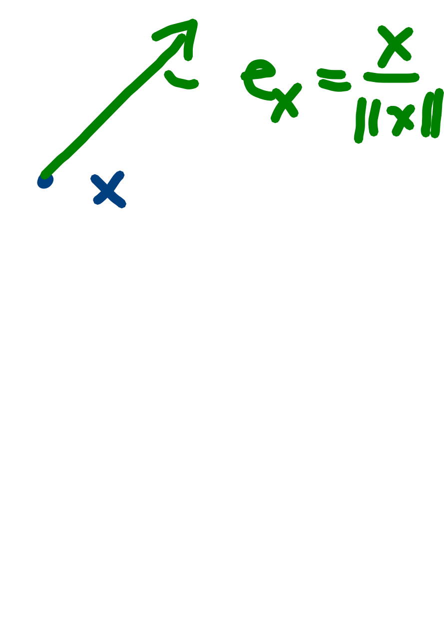
(vi) $c > 1$: $y = \pm\sqrt[2]{\cos x + c}$

(1.23) Die Keplersche Gleichung

Frage: Wie bewegt sich ein Planet (z.B. die Erde) im Schwerefeld der Sonne?

Annahme:
- Sonne bewegt sich nicht
- Symmetrieannahmen (Homogenität und Isotropie des Raumes) führen auf

$$m_E \ddot{x} = -\varphi(\|x\|)\cdot \frac{x}{\|x\|}$$

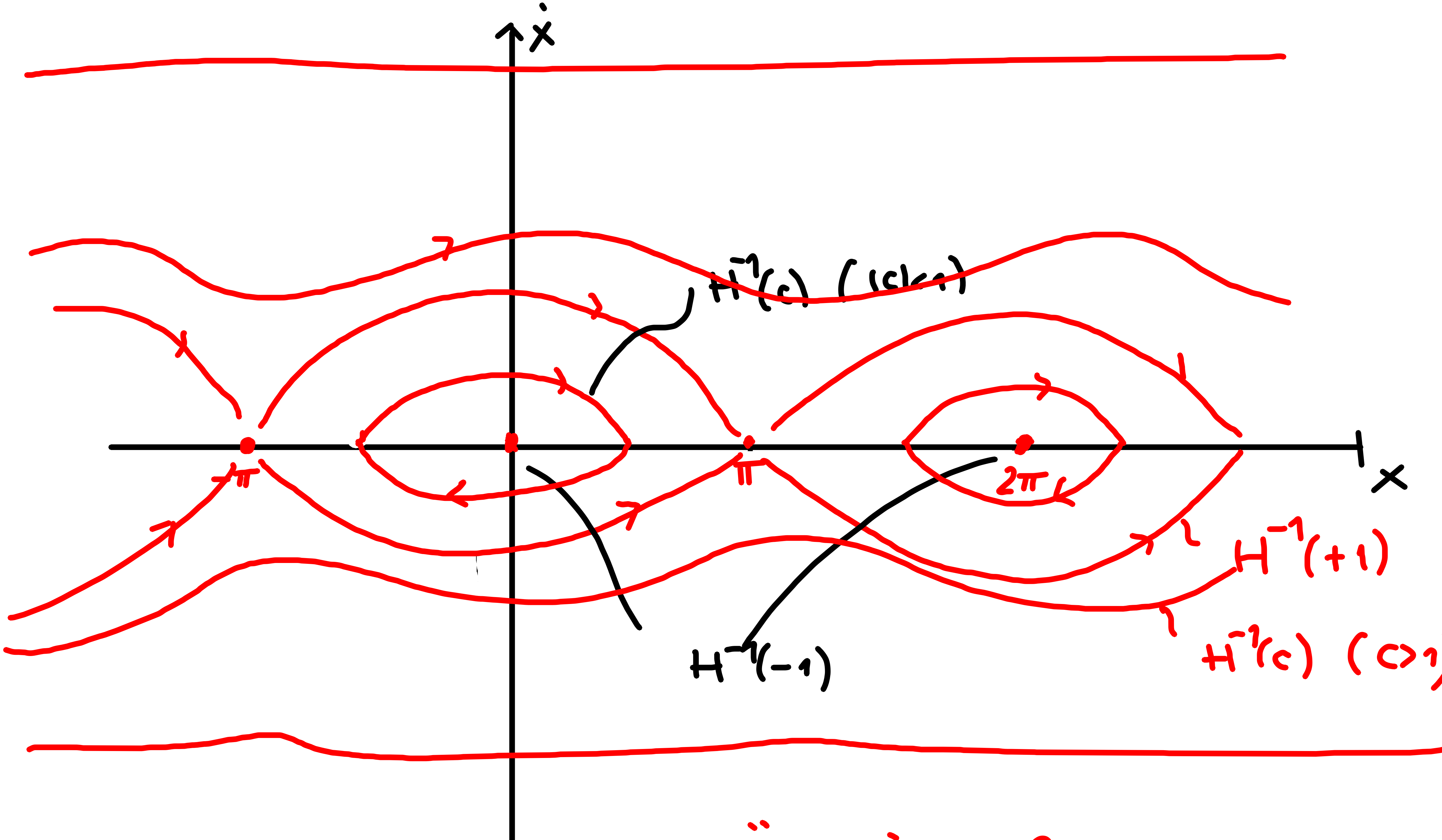


mit $\varphi > 0$. Keplers Gesetze (siehe Skript) führen auf:

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^2}.$$

Daraus also Keplers Gleichung:

$$\ddot{x} = -\frac{x}{\|x\|^3}. \quad \text{(Kepler)}$$



$$\ddot{x} + \sin x = 0$$